

3 Kombinatorik

Die Kombinatorik wird an zahlreichen Stellen der Stochastik und Statistik angewendet. Wir haben beschlossen, sie an dieser Stelle einzubauen, um sie im Anschluss anwendungsorientiert einsetzen zu können.

In den ersten beiden Beispielen wird dieselbe Fragestellung auf zwei verschiedene Arten bearbeitet, einmal mithilfe von Kleidung und im zweiten Fall mithilfe des Urnenmodells. Es bietet sich an, die Beispiele in zwei Arbeitsgruppen bearbeiten zu lassen und die Ergebnisse zu vergleichen. Nach der Lösung der Beispiele 1 und 2 kann die *Produktregel* notiert werden. Diese Beispiele können ohne ClassPad bearbeitet werden. Daher werden die Schüler sie in Arbeitsgruppen ohne den ClassPad lösen und ihre Ergebnisse präsentieren. So kann der Vergleich „Urne“ \leftrightarrow „reale Anwendung“ gezogen werden. Im Anschluss lässt sich das *Urnenmodell* definieren.

Das Beispiel 3 führt zum *Ziehen mit Zurücklegen*.

Nach Beispiel 4 sollte die Definition der Permutation stattfinden. In diesem Beispiel scheint es sinnvoll, den ClassPad zur Berechnung des Ergebnisses zu benutzen.

In den Beispielen 5 und 6 werden der Unterschied zwischen *Ziehen mit* und *Ziehen ohne Zurücklegen* unter ähnlichen Voraussetzungen sowie die Verwendung des ClassPad erklärt. Hierbei ist auf die Eingabe bei der Berechnung von nPr und nCr zu achten. Nach den Beispielen 5 und 6 können die Definitionen des *Ziehens mit einem Griff mit/ohne Beachtung der Reihenfolge* getroffen werden.

Um den Unterschied zwischen den Urnenmodellen bzgl. des Ziehens mit/ohne Zurücklegen anschaulich zu machen, sollen die Lösungen der Beispiele 5 und 6 in Beispiel 7 graphisch notiert werden. Diese Gegenüberstellung befindet sich bei den Musterlösungen der Vertiefungsaufgaben.

Eine Vertiefung schafft die Anwendung der Kombinatorik in der Zahlentheorie. Die Binomialkoeffizienten werden in der Tabellenkalkulation verwendet und führen über das *Pascal'sche Dreieck* zu Gesetzmäßigkeiten bei den Binomialkoeffizienten und den Potenzen $(a + b)^n$ für $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \geq 0$. Nachdem die Schülerinnen und Schüler die Gesetzmäßigkeiten erkannt haben, können sie per *Induktion* bewiesen werden, vgl. Aufgabenteil f.

Kombinatorik

Beispiel 1 a) Stephan hat drei verschiedene T-Shirts und fünf verschiedene Hosen. Wie viele Zusammenstellungen von T-Shirt/Hose sind möglich?

b) Stephan besitzt zusätzlich noch vier unterschiedliche Paare von Schuhen. Wie viele Zusammenstellungen von T-Shirt/Hose/Schuhe gibt es?

Beispiel 2 a) Vor Verena stehen zwei Urnen. In der ersten Urne befinden sich drei grüne Kugeln, in der zweiten Urne befinden sich fünf blaue Kugeln. Die Kugeln sind nummeriert. Wie viele Kombinationen von Kugeln sind möglich?

b) Verena hat noch eine dritte Urne mit vier roten Kugeln. Wie viele Kombinationen von jeweils einer Kugel aus den drei Urnen sind möglich?

Beispiel 3 Binärzahlen bestehen aus zwei unterschiedlichen Ziffern, 0 und 1. Wie viele

a) 5-stellige, b) 7-stellige, c) k -stellige

Binärzahlen gibt es? Übersetzen Sie zunächst in ein geeignetes Urnenmodell.

Beispiel 4 Bei einem 100-m-Lauf einer Leichtathletik-Veranstaltung werden die acht Bahnen zufällig vergeben.

a) Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Vergabe der Bahnen?

Hinweis. Verwenden Sie für die Berechnung $!$ unter **Erweit.** der Tastatur.

b) Drei der acht Läufer sind nicht rechtzeitig zum Wettlauf erschienen. Die übrigen Läufer werden nun zufällig auf die acht Bahnen verteilt.

Beschreiben Sie ein Urnenmodell, mit dem sich dieser Sachverhalt beschreiben lässt.

c) Wie viele Möglichkeiten der Bahnverteilung gibt es?

Hinweis. Verwenden Sie für die Berechnung $\binom{n}{k}$ unter **Erweit.** der Tastatur.

Beispiel 5 Ein Ausschuss von vier Personen wählt gleichzeitig einen Vorsitzenden und seinen Vertreter, indem gleichzeitig ein Vorschlag für den Vorsitzenden und ein Vorschlag für den Stellvertreter gemacht werden.

a) Suchen Sie ein Urnenmodell zur Beschreibung der Wahl.

b) Wie viele unterschiedliche Wahlergebnisse gibt es?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn zusätzlich ein dritter hierarchisch gestufter Vertreter gewählt wird?

Beispiel 6 Ein Ausschuss von vier Personen wählt zwei gleichberechtigte Sprecher durch Losentscheid.

a) Suchen Sie ein Urnenmodell zur Beschreibung der Wahl.

b) Wie viele Möglichkeiten der Vorschläge für Vertreter und Stellvertreter hat der Ausschuss?

- c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn zusätzlich ein dritter gleichberechtigter Sprecher gewählt wird?

Hinweis. Verwenden Sie für die Berechnung \boxed{nCr} unter **Erweit.** der Tastatur.

- Beispiel 7** a) Stellen Sie in einem Schaubild die möglichen Wahlergebnisse aus den Beispielen 5 und 6 gegenüber. Benennen Sie Unterschiede.
 b) Übertragen Sie die Ergebnisse aus den Beispielen 5 und 6 auf den allgemeinen Fall eines Urnenmodells mit n Kugeln, aus denen k Mal gezogen wird.

Lösung von Beispiel 1. a) Nummeriert man die Hosen durch H_1, H_2, \dots, H_5 und die T-Shirts durch T_1, T_2, T_3 , so gibt es die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} &(H_1, T_1) \quad (H_2, T_1) \quad (H_3, T_1) \quad (H_4, T_1) \quad (H_5, T_1) \\ &(H_1, T_2) \quad (H_2, T_2) \quad (H_3, T_2) \quad (H_4, T_2) \quad (H_5, T_2) \\ &(H_1, T_3) \quad (H_2, T_3) \quad (H_3, T_3) \quad (H_4, T_3) \quad (H_5, T_3) \end{aligned}$$

Es liegen $3 \cdot 5 = 15$ Kombinationsmöglichkeiten vor.

- b) Für jede Kombination aus Teil a) gibt es vier Varianten mit verschiedenen Paaren von Schuhen. Damit gibt es $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ mögliche Kombinationen.

Lösung von Beispiel 2. a) Es gibt $3 \cdot 5 = 15$ Möglichkeiten.

- b) Für jede der Möglichkeiten aus Teil a) gibt es vier Kombinationsmöglichkeiten mit verschiedenen roten Kugeln. Damit sind es insgesamt $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ mögliche Kugeltripel.

Lösung von Beispiel 3. Die Anwendung lässt sich mit einer Urne vergleichen, in der zwei Elemente 0 und 1 liegen. In jedem Schritt wird eine Kugel gezogen und danach zurückgelegt. Für jeden der Plätze gibt es zwei Möglichkeiten, d. h.

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$,

b) $2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^7 = 128$ Dualzahlen.

- c) Aus einer Urne mit 2 Kugeln wird k Mal mit Zurücklegen gezogen.

$$\Rightarrow \text{es gibt } n^k = 2^k \text{ } k\text{-stellige Dualzahlen}$$

Lösung von Beispiel 4. a) Möglich sind alle Permutationen der Zahlen 1 bis 8 des Tupels $(1, \dots, 8)$. Sind alle Plätze frei, so gibt es für die erste Kugel acht Möglichkeiten, einen Platz zu wählen. Für die zweite Kugel gibt es sieben Möglichkeiten, usw. Insgesamt sind es $8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 40320 = 8!$ (sprich: „8 Fakultät“) Möglichkeiten zur Bahnverteilung.

Die Berechnung von $8!$ lässt sich mithilfe des ClassPad unter $\boxed{\sqrt{x}}$ **Main** durch **Erweit.** \rightarrow $\boxed{!}$ erledigen.

b) Eine mögliche Beschreibung ist das Urnenmodell des fünfmaligen Ziehens aus einer Urne mit acht Elementen ohne Zurücklegen. Die Reihenfolge der Bahnvergabe ist zu berücksichtigen.

c) Es gibt $\frac{8!}{(8-5)!}$ Bahnverteilungen.

Zur Berechnung der Möglichkeiten von r Zügen mit Beachtung der Reihenfolge dient der Befehl nPr . (P steht für *Permutations*.)

unter  Main durch


Erweit. \rightarrow       (Berechnung von $\frac{8!}{(8-5)!}$)

liefert das Ergebnis 6720.

Lösung von Beispiel 5. a) Die Wahl lässt sich mithilfe einer Urne beschreiben, aus der ohne zurückzulegen gezogen wird. Die Reihenfolge der Züge ist von Bedeutung.

So lassen sich der erste Zug durch die Wahl des Vorsitzenden und der zweite Zug durch die Wahl des Stellvertreters beschreiben.

b) Für den Vorsitzenden gibt es vier Möglichkeiten; für den stellvertretenden Vorsitzenden bleiben dann noch drei Möglichkeiten. Insgesamt sind es also $4 \cdot 3 = 12$ Möglichkeiten. Mit dem ClassPad kann die Berechnung bei r -fachem Ziehen mit Beachtung der Reihenfolge der Befehl nPr vollzogen werden. (P steht für *Permutations*.)

Erweit. \rightarrow       (Berechnung von $\frac{4!}{(4-2)!}$)

ergibt 12 Möglichkeiten.

c) Wird eine dritte Person gewählt, gibt es insgesamt

Erweit. \rightarrow       , (Berechnung von $\frac{4!}{(4-3)!}$)

also 24 Möglichkeiten.

Lösung von Beispiel 6. a) Die Wahl lässt sich mithilfe einer Urne beschreiben, aus der ohne zurückzulegen gezogen wird, wobei die Reihenfolge der Züge unbedeutend ist.

b) Im Unterschied zu Beispiel 5 spielt die Reihenfolge der Züge keine Rolle. Daher ist das Ergebnis aus Beispiel 5 a) durch $2!$ zu dividieren.


Zur Berechnung der Möglichkeiten von Permutationen ohne Beachtung der Reihenfolge dient beim ClassPad der Befehl nCr . (C steht für *Combinations*.)

Hier ist

Erweit. \rightarrow       (Berechnung von $\binom{4}{2}$)

einzugeben und liefert sechs Möglichkeiten.

c) Wird eine dritte Person gewählt, gibt es insgesamt

Erweit. \rightarrow       , (Berechnung von $\binom{4}{3}$)

also vier Möglichkeiten für die Wahl gleichberechtigter Sprecher.